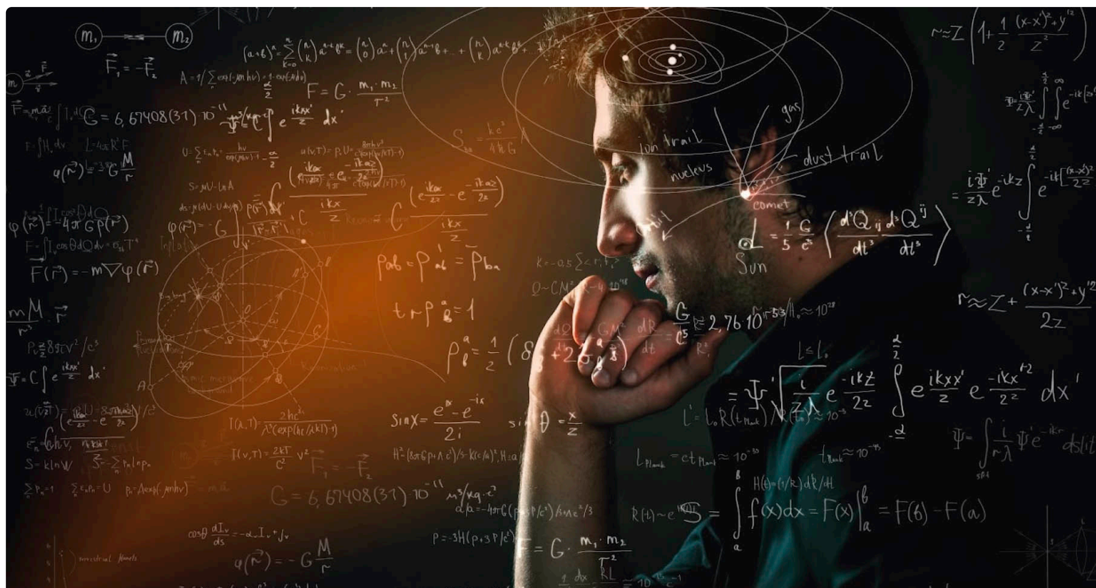


Modelos e modelagem usando funções

Prof. Aleksandro de Mello

Descrição

Vinculação das funções a fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos por meio de modelos matemáticos.

Propósito

Utilizar as funções e respectivas propriedades para modelar problemas, buscando sua solução ou previsão.

Preparação

Tenha em mãos uma calculadora científica, que pode ser do seu computador ou smartphone. Também pode-se utilizar um aplicativo de produção de gráficos, como o GeoGebra, para visualizar as funções manipuladas.

Objetivos

Módulo 1

Fenômenos físicos e econômicos

Reconhecer fenômenos físicos e econômicos usando funções polinomiais.

Módulo 2

Modelos matemáticos associados a funções exponenciais e logaritmos

Identificar modelos matemáticos associados a funções exponenciais e logaritmos em situações financeiras e pesquisas biológicas e químicas.

Módulo 3

Funções periódicas

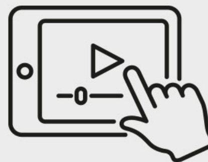
Aplicar funções periódicas aos modelos físicos e econômicos.

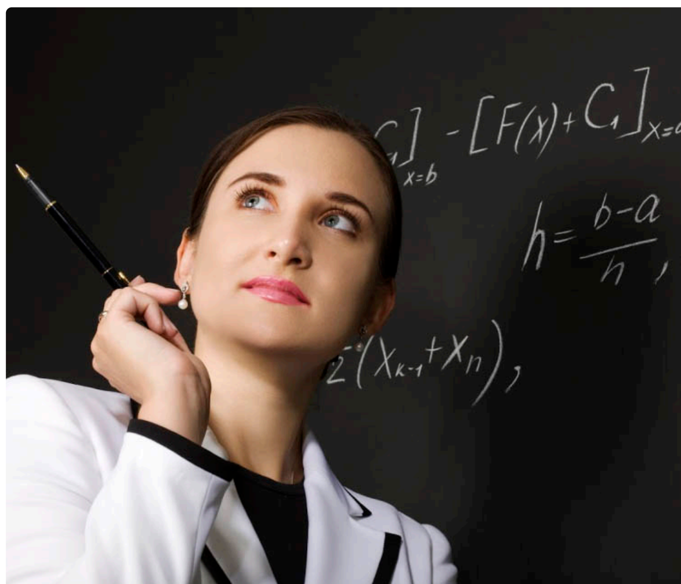


Introdução

Olá! Antes de começarmos, assista ao vídeo e entenda os principais aspectos que serão abordados neste conteúdo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





1 - Fenômenos físicos e econômicos

Ao final deste módulo, você será capaz de reconhecer fenômenos físicos e econômicos usando funções polinomiais.

Modelos e modelagens a partir de funções de primeiro e segundo grau

Neste módulo, abordaremos modelos e modelagens feitos a partir do uso de funções de primeiro e segundo grau. Veremos, a seguir, vários problemas em que a solução é possível por meio do conhecimento das propriedades dessas funções. Vamos lá!



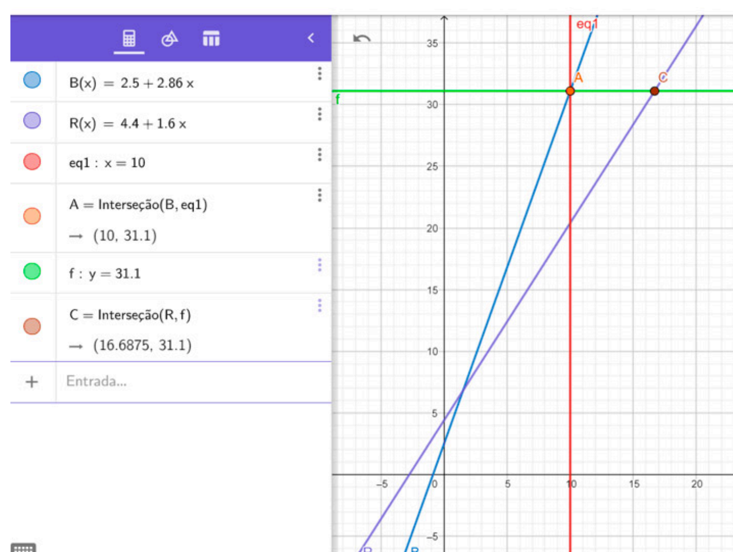
Exemplo - Preço da gasolina

Veja o primeiro problema a ser resolvido.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

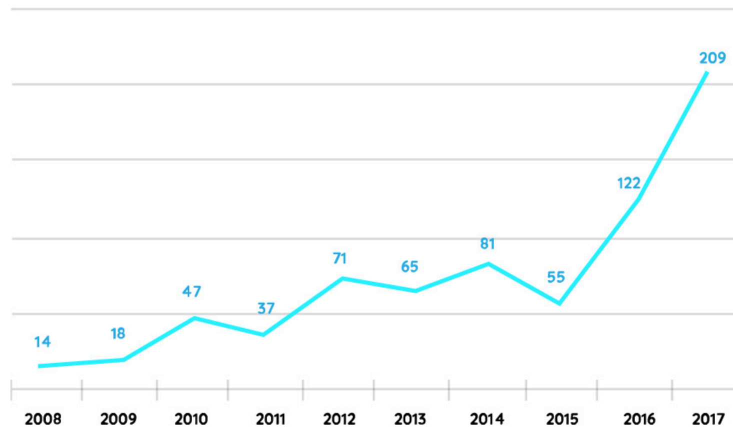


Utilizando o GeoGebra, podemos entender e identificar essas manipulações. Observe:



Exemplo - Carga tributária

Em 2018, a greve dos caminhoneiros abalou a economia nacional. Esse movimento tinha como principal reivindicação a redução da carga tributária sobre o diesel nos postos e nas refinarias do Brasil. A carga tributária já vinha aumentando nos anos anteriores, o que intensificou as exportações de diesel dos EUA para o Brasil de maneira significativa. Veja no próximo gráfico:



EUA: Exportação de diesel para o Brasil em milhares de barris por dia.
Gráfico: Brasil 247

Supondo que, a partir de 2016, o crescimento da exportação continuasse de maneira linear ao longo dos anos seguintes, qual seria a quantidade de barris por dia que os EUA exportariam para o Brasil em 2019?

Podemos observar no gráfico que, em 2016, os EUA exportaram 122 milhares de barris por dia para o Brasil e, em 2017, esse número chegou a 209 milhares de barris por dia. Como o crescimento seria linear a partir do ano de 2016, vamos considerá-lo o ano inicial, representado por t = 0, e 2017 como o ano t = 1. A quantidade de (milhares de) barris exportados para o Brasil, nesse caso, é dado por uma função do primeiro grau, em que t representa o ano considerado. Conforme os dados anteriores, temos que:

$$B(t) = at + b$$
$$B(0) = 122 \quad e \quad B(1) = 209$$

Substituindo esses valores na função, teremos:

$$122 = a.0 + b \quad \Rightarrow \quad b = 122$$
$$e$$
$$209 = a.1 + b \quad \Rightarrow \quad 209 = a + 122 \quad \Rightarrow \quad a = 87$$

Desse modo, a quantidade de milhares de barris por dia é representada:

$$B(t) = 87t + 122$$

Para saber a quantidade exportada em 2019, devemos nos atentar à seguinte lógica: se 2016 corresponde a t=0; 2017 corresponde a t=1; 2018 corresponde a t=2; então, 2019 corresponde a t=3. Logo, o valor procurado será:

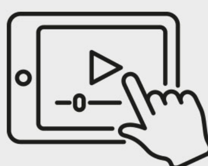
$$B(3) = 87.3 + 122 = 383 \text{ milhares de barris por dia.}$$



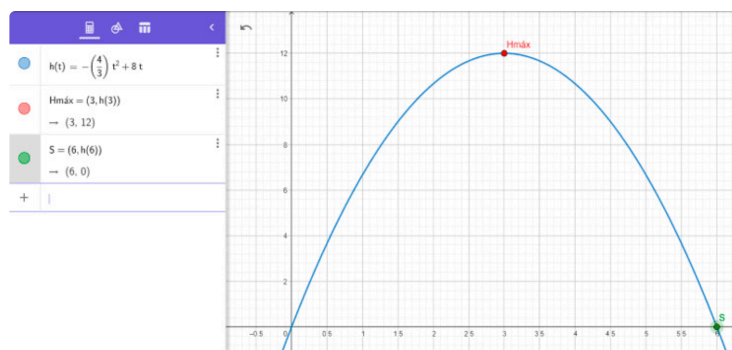
Exemplo - Trajetória da bola

Agora, vamos ao terceiro problema.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Utilizando o GeoGebra, podemos entender e identificar essas manipulações. Observe:

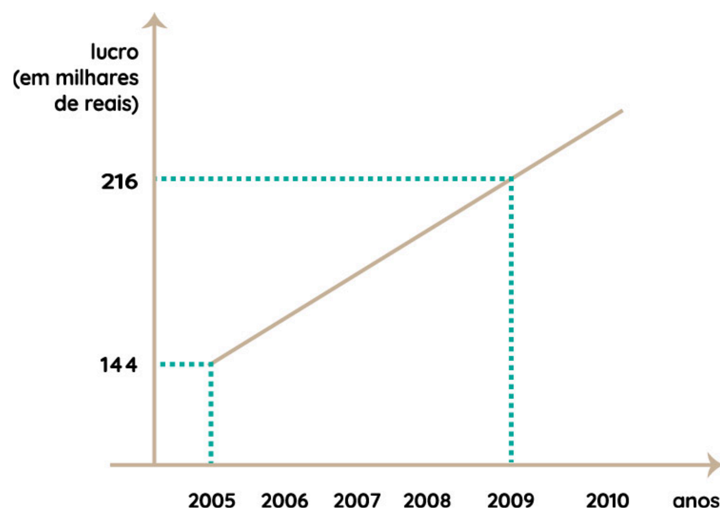


Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

(PETROBRAS - 2010) O lucro anual de uma pequena empresa vem crescendo linearmente como mostra a figura.



Expressão adaptada de Trigonometria aplicada na vida real

Se esse ritmo de crescimento anual for mantido, qual será, em milhares de reais, o lucro dessa empresa em 2010?

A 224

B 234

C 248

D 254

E 268

Parabéns! A alternativa B está correta.

Analisando a forma do gráfico dessa função, temos que o lucro dessa empresa pode ser obtido utilizando um polinômio do primeiro grau da forma:

$$f(x) = ax + b$$

Identificando o ano de 2005 com x = 1, teremos o ano de 2009 com x = 5. Assim, pelo gráfico, temos que:

$$f(1) = 144 \text{ e } f(5) = 216$$

Substituindo esses valores em

$$\boldsymbol{f(x) = ax + b},$$

teremos o seguinte sistema:

$$a + b = 144$$

$$5a + b = 216$$

Multiplicando a primeira igualdade por (-1) e somando membro a membro com a segunda igualdade, obtemos:

$$4a = 72 \Rightarrow a = 18$$

Substituindo $a = 18$ em $a + b = 144$, obtemos que $b = 126$.

Logo, $f(x) = 18x + 126$

Como o ano de 2010 associa-se $\text{com } x = 6$, o lucro nesse ano, em milhares de reais, será de:

$$f(6) = 18.(6) + 126 = 234$$

Questão 2

(Adaptado de UFOP - MG) Em determinado dia, a temperatura numa praia atingiu seu valor máximo às 14h. Suponha que, nesse dia, a temperatura da praia $f(t)$, em graus, fosse dada por $f(t) = -t^2 + b \cdot t - 160$, sendo t o tempo, em horas, com $8 \leq t \leq 20$. Então, a temperatura máxima nesse dia foi de:

A 30°

B 32°

C 34°

D 36°

E 38°

Parabéns! A alternativa D está correta.

Sabemos que a temperatura máxima nesse dia ocorreu às 14h. Logo, a temperatura máxima procurada é dada por: $f(14)$.

Como não sabemos o valor de b na função $f(t)$, temos que descobri-lo. Sendo o gráfico da função $f(t)$ uma parábola voltada

para baixo, a temperatura máxima ocorre no vértice dela. Sabendo que a temperatura máxima nesse dia ocorreu às 14h, o "t do vértice" é igual a $t_V = 14$. Assim, como $f(t) = -t^2 + b.t - 160$, então, $a = -1, b = b$ e $c = -160$ e temos:

$$t_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 14 = \frac{-b}{2(-1)} \Rightarrow -b = -28 \Rightarrow b = 28$$

Logo, temos que:

$$f(t) = -t^2 + 28t - 160$$

E a temperatura máxima atingida nesse dia é dada por:

$$f(14) = -(14)^2 + 28.(14) - 160 = -196 + 392 - 160 = 36^\circ$$

Utilizando o GeoGebra.





2 - Modelos matemáticos associados a funções exponenciais e logaritmos

Ao final deste módulo, você será capaz de identificar modelos matemáticos associados a funções exponenciais e logaritmos em situações financeiras e pesquisas biológicas e químicas.

Modelagens e aplicações em funções exponenciais

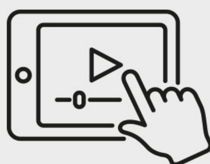
As funções exponenciais e logarítmicas são usadas, com frequência, em várias áreas da sociedade. Destacaremos, principalmente, as aplicações em pesquisas de laboratórios sobre produção agrícola, o crescimento de determinadas espécies de plantas, as aplicações e os investimentos financeiros a juros compostos e, finalmente, a desintegração de materiais e elementos radioativos na natureza.



Exemplo - Crescimento do número de bactérias

Mais uma vez, vamos resolver o primeiro problema juntos!

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo - Altura média de espécie de planta

Este exemplo foi uma das questões de um dos concursos públicos realizados pela Petrobras em 2010.

(PETROBRAS - 2010) Um estudo em laboratório revelou que a altura média de determinada espécie de planta é dada, a partir de um ano de idade, pela função:

$$h(x) = \log\left(10^{1.35} \cdot \sqrt[4]{2x}\right)$$

Sabendo que **h(x)** representa a altura média, em metros, e **x** representa a idade, em anos, qual é, em metros, a altura média de uma planta dessa espécie aos 5 anos de idade?

Vamos à resolução!

Note que a altura desejada é exatamente o valor de h(5). Para encontrar esse valor, vamos utilizar as seguintes propriedades de exponenciais e de logaritmos:

$$h(5) = \log\left(10^{1,35} \cdot \sqrt[4]{2.5}\right) = \log\left(10^{1,35} \cdot \sqrt[4]{10}\right) = \log\left(10^{1,35} \cdot 10^{1/4}\right) = \log\left(10^{1,35} \cdot 10^{0,25}\right) =$$

Portanto, a altura dessa planta aos 5 anos de idade será de 1,6 metro.

Exemplo - Investimento

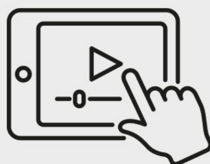
Uma das principais áreas em que usamos, implicitamente, funções exponenciais e logarítmicas é na análise de investimentos e empréstimos no regime de juros compostos. A fórmula do montante para o regime de capitalização composto é dada por uma função exponencial que depende do tempo t.



Resolução do exemplo

Vejamos como resolver uma situação desse tipo, no vídeo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

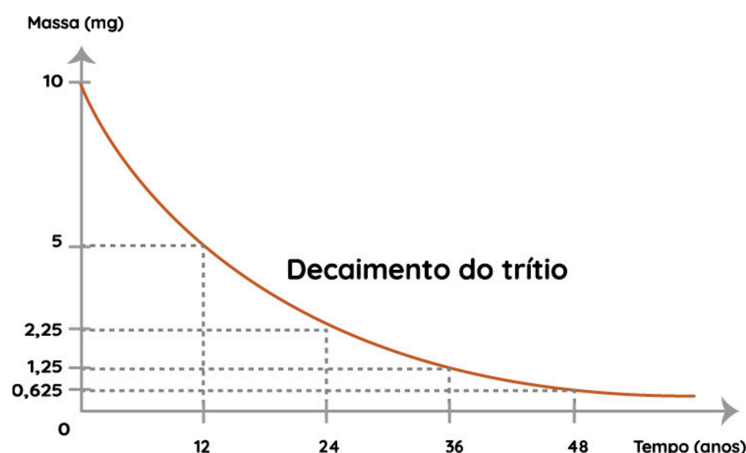


Exemplo - Elementos químicos radioativos

Outra aplicação um pouco mais delicada, porém com alto grau de interesse para a sociedade, ocorre nos laboratórios químicos em pesquisas sobre a radiação e o tempo de vida de determinados compostos da natureza.

Assim como toda matéria existente no planeta, os elementos químicos radioativos da natureza desintegram-se com o passar dos anos; no entanto, veremos que o tempo de desintegração não depende da massa inicial do elemento, mas sim dos compostos que cada um possui. Vejamos como resolver uma situação desse tipo.

Segundo Marcondes (s.d.), o trítio é o mais pesado dos três isótopos de hidrogênio, sendo menos abundante e radioativo, emitindo radiação do tipo beta. Esse composto é utilizado, principalmente, como combustível nuclear para a produção de energia por fusão nuclear e possui meia vida de 12 anos, ou seja, a cada 12 anos a massa do trítio cai pela metade, veja:



Decaimento do trítio.
Gráfico: Brasil Escola.

Note que o decrescimento da massa do trítio é do tipo exponencial. Podemos obter a massa do trítio utilizando a seguinte fórmula:

$$M(t) = M_0 \cdot \left(2^{-t/12}\right), (I)$$

Em que M_0 representa a massa inicial do trítio e **M(t)** representa a massa de trítio após **t** anos.

Com base nessas informações, quantos anos serão necessários para que determinada massa de trítio se reduza a um quinto da massa inicial?

Vamos à resolução!

Dados:

$$\log(0,2) = -0,699 \text{ e } \log(2) = 0,301$$

Queremos saber qual é o tempo t necessário para que uma massa inicial M_0 se reduza a um quinto dessa massa, ou seja, queremos

encontrar t tal que: $M(t) = \frac{M_0}{5}$

Substituindo esse valor na expressão (I), temos:

$$\frac{M_0}{5} = M_0 \cdot \left(2^{-2/12}\right) \Rightarrow \frac{1}{5} = 2^{-t/12} \Rightarrow 0,2 = 2^{-t/12}$$

Aplicando o logaritmo nessa igualdade, obtemos que:

$$\log(0,2) = \log\left(2^{-t/12}\right) \Rightarrow -0,699 = \frac{-t}{12} \cdot \log(2) \Rightarrow -0,699 = \frac{-t}{12} \cdot 0,301 \Rightarrow -0,301.\, t =$$

Ou seja, para certa quantidade de trítio desintegrar-se a um quinto de sua massa inicial, são necessários 28 anos aproximadamente.

Esse exemplo nos mostra que a desintegração do trítio é relativamente rápida se comparada a outros materiais radioativos.

Saiba mais

Você com certeza já deve ter ouvido falar sobre o bombardeio nuclear realizado pelos EUA ao Japão em 1945, um dos acontecimentos históricos mais marcantes lembrado até os dias atuais, principalmente pelos japoneses.

Um dos principais componentes das bombas nucleares é o Urânio U-235. Devido ao seu alto índice radioativo, não são necessários muitos quilos de urânio para provocar um estrago gigantesco como o que aconteceu no Japão. A bomba lançada em Hiroshima, por exemplo, tinha apenas 7 quilos de Urânio U-235 e um poder destrutivo equivalente a 20 mil toneladas de TNT (FONSECA, s.d.).

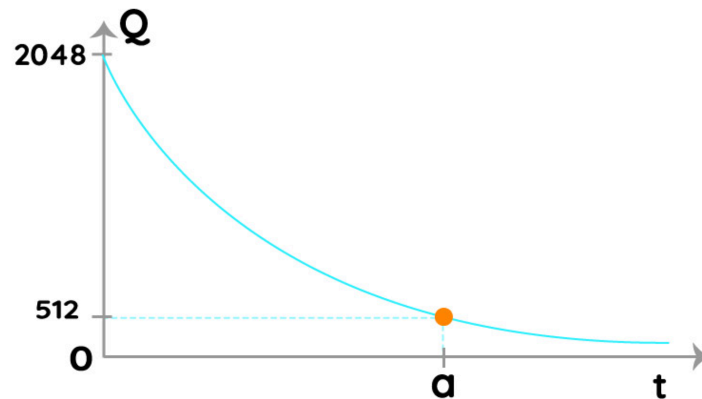
Segundo Betz (2015), o urânio natural é composto basicamente pelos urânios U-238 (cerca de 99,3%) e U-235 (cerca de 0,7%). Estudos preveem que o Urânio U-238 leva cerca de 4,5 bilhões de anos para chegar à meia vida, enquanto o Urânio U-235 leva cerca de 704 milhões de anos. Ou seja, o tempo de desintegração do urânio é muito lento se comparado a outros materiais. O objetivo das pesquisas nessa área é saber o tempo e a taxa de radiação prejudiciais à saúde.

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

(Adaptado de VUNESP - SP) Uma substância química se decompõe segundo a lei $M(t)=k.2^{-0,5t}$, sendo k uma constante e $M(t)$ representa a massa (em gramas) da substância após decorrer o tempo t (em dias). Considere que as informações obtidas sobre essa substância fornecem o seguinte gráfico:



Expressão adaptada de Trigonometria aplicada na vida real

Então, pode-se afirmar que os valores de k e a são, respectivamente:

A 512 e 4.

B 10 e 512.

C 2048 e 10.

D 4 e 2048.

E 2048 e 4.

Parabéns! A alternativa E está correta.

Observando o gráfico, podemos ver que os pontos $(0, 2048)$ e $(a, 512)$ pertencem ao gráfico de $M(t)$. Como os pontos no gráfico da função são da forma $(t, M(t))$, então, utilizando o ponto $(0, 2048)$, obtemos:

$$M(0) = 2048 \Rightarrow k \cdot 2^{-0,5a} = 2048 \Rightarrow k = 2048$$

$$\log 0, M(t) = 2048.2^{-0,5.a}$$

Utilizando agora o ponto $(a, 512)$, temos que:

$$M(a) = 512 \Rightarrow 2048.2^{-0,5(a)} = 512 \Rightarrow 2^{-0,5(a)} = \frac{512}{2048}$$

$$2^{-0,5a} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{-0,5a} = 2^{-2} \Rightarrow -0,5a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{-0,5} = 4$$



Portanto, os valores de k e a são, respectivamente, 2048 e 4.

Questão 2

(UFSCar - SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui desde que é plantada segundo o seguinte modelo matemático com **h(t)** em metros e **t** em anos: **h(t) = 1,5 + log3 (t+1)**.

Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

A 9 anos

B 8 anos

C 5 anos

D 4 anos

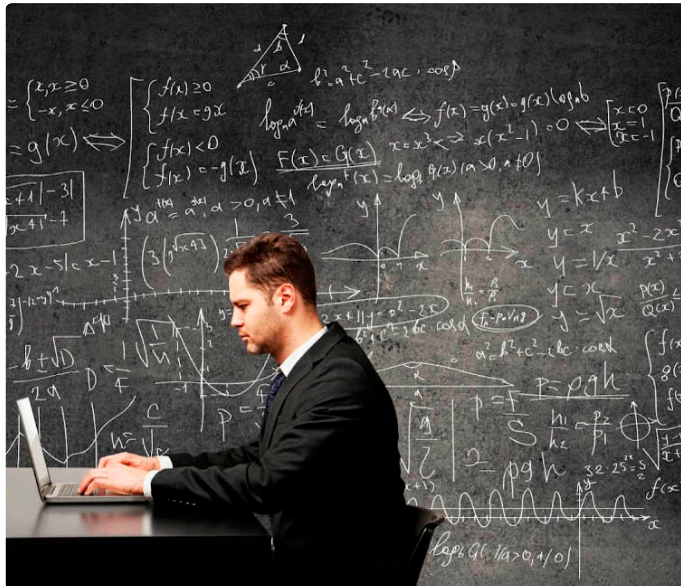
E 2 anos

Parabéns! A alternativa B está correta.

Queremos encontrar o valor de **t** quando **h(t) = 3,5m**. Substituindo 3,5 na expressão dada e utilizando a propriedade do logaritmo, obtemos:

$$\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b3,5 = 1,5 + \log_3(t+1) \Rightarrow 3,5 - 1,5 = 1$$





3 - Funções periódicas

Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar funções periódicas aos modelos físicos e econômicos.

Funções trigonométricas

Você sabia que é possível aplicar funções trigonométricas para resolver problemas práticos? Essas funções podem ser utilizadas para saber, por exemplo, a periodicidade da altura das marés, o tempo de claridade diária de uma região, a relação dessas funções com as propriedades métricas em um triângulo e até mesmo para medir a pressão arterial de um paciente.

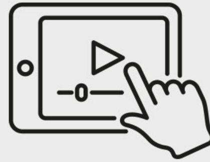
As funções trigonométricas possuem uma propriedade particular que é a periodicidade, ou seja, são funções que geram ciclos e, por isso, adaptam-se a muitas situações práticas.



Exemplo - Periodicidade

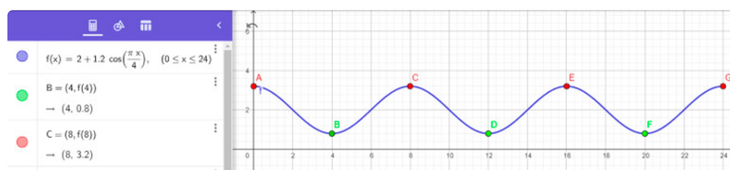
Mais uma vez, vamos resolver o primeiro problema juntos!

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Utilizando o GeoGebra, podemos verificar e visualizar nossas operações de maneira gráfica.

Nota-se a importância dos questionamentos (b) e (c) apresentados no exemplo 1, pois, caso o questionamento fosse apenas sobre o período vespertino (entre 12h e 18h), as respostas seriam diferentes (as respostas de (b) e (c) seriam, respectivamente, apenas 16h e apenas 12h), porque, nesse caso, estaríamos alterando o momento de análise da função, ou seja, alterando o domínio da função e isso pode causar variações na imagem.





Trigonometria nas medições reais

Vamos descobrir a real proporção da Torre Eiffel?

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo - Claridade diária

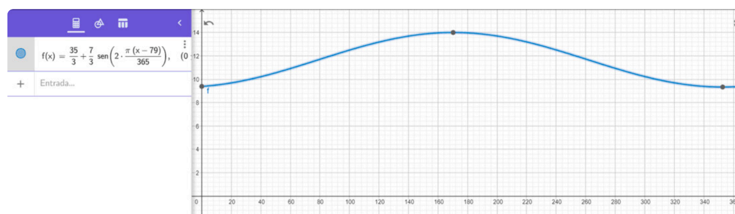
Em determinada região, o tempo de duração do dia (número de horas de claridade diária) é dado pela função

$$f:[0,365] \rightarrow R$$

cuja expressão é:

$$f(x)=\frac{35}{3}+\frac{7}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{2 \pi-79}{265}\right)$$

Sendo x o número de dias decorridos desde o início do ano.



Aplicações das funções trigonométricas no estudo de fenômenos periódicos – UNESP

Observe o gráfico de **f** dado acima e responda as perguntas:

1. Qual é o tempo mínimo e o tempo máximo de horas de claridade diária?
2. Quais são os meses do ano em que ocorrem os menores números de horas de claridade diária?
3. Suponha que uma família pretenda viajar para essa região nas férias e queira aproveitar pelo menos 12h de claridade diária. Em quais meses do ano a viagem deve ocorrer?

Vamos ao resultado!

(a) Lembre-se de que a função da forma

$$g(x) = \text{sen}(ax + b)$$

tem a imagem dada pelo intervalo.

$$\text{Im}(g) = [-1, 1]$$

Desse modo, a imagem da função:

$$f(x) = \frac{35}{3} + \frac{7}{3}\text{sen}\left(\frac{2\pi(x-79)}{365}\right)$$

Pode ser obtida:

$$\begin{gathered}
-1 \leq \text{sen}\left(\frac{2\pi(x-79)}{365}\right) \leq 1 \left(\text{multiplicando } \frac{7}{3}\right) \Rightarrow \\
-\frac{7}{3} \leq \frac{7}{3}\text{sen}\left(\frac{2\pi(x-79)}{365}\right) \leq \frac{7}{3}\left(\text{somando } \frac{35}{3}\right) \Rightarrow \\
\frac{28}{3} \leq \frac{35}{3} + \frac{7}{3}\text{sen}\left(\frac{2\pi(x-79)}{365}\right) \leq \frac{42}{3} \Rightarrow \\
9,3 \leq \frac{35}{3} + \frac{7}{3}\text{sen}\left(\frac{2\pi(x-79)}{365}\right) \leq 14 \Rightarrow \\
9,3 \leq f(x) \leq 14
\end{gathered}$$

Nessa região, a quantidade mínima de horas de claridade diária é de 9,3 horas e a quantidade máxima é de 14 horas.

(b) Ao analisar o gráfico, podemos perceber que os **menores** números de horas de claridade diária ocorrem nos primeiros e nos últimos dias do ano. Assim, os meses com menor número de horas de claridade diária são janeiro e dezembro.

(c) Analisando o gráfico, podemos notar que o período que possui pelo menos 12 horas de claridade diária está **entre os dias 88 e 253 do ano**. Lembrando que:

Janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro possuem 31 dias;

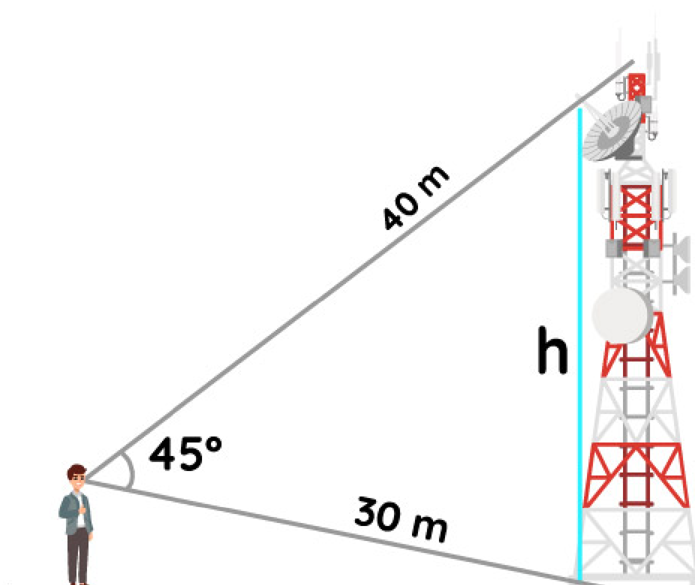
Fevereiro possui 28 dias (ou 29 em ano bissexto);

Abril, junho, setembro e novembro possuem 30 dias.

Consequentemente, os melhores meses para a viagem se situam entre os dias 88 e 253 do ano. São eles: **abril, maio, junho, julho e agosto**.

Exemplo - Altura da torre

(PETROBRAS - 2004) Considere que um indivíduo enxerga uma torre com um ângulo de visão de 45°, isto é, o ângulo entre o segmento de reta l, que liga seus olhos ao topo da torre, e o segmento de reta t, que liga seus olhos à base da torre, é igual a 45°, veja:



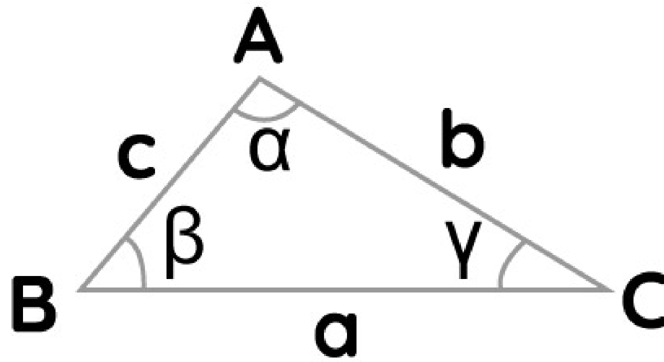
Nessa situação, se o comprimento de l é igual a 40 metros e o comprimento de t é igual a 30 metros, então, a altura h da torre é superior a 30m?

Vamos ao resultado!

Note que temos poucas informações a respeito dos componentes

envolvidos. No entanto, podemos resolver esse problema rapidamente se utilizarmos a lei dos cossenos:

Considere o triângulo ABC, cujos ângulos são α, β, γ, representados abaixo:



Valem as seguintes relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.\, b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.\, a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Assim, utilizando os dados da figura do enunciado, temos que:

$$h^2 = 30^2 + 40^2 - 2.30 \cdot 40 \cdot \cos\left(45^\circ\right) \Rightarrow$$
$$h^2 = 900 + 1600 - 2.30 \cdot 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h^2 = 2500 - 1200\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$h^2 \cong 803 \Rightarrow h \cong \sqrt{803}$$

Como 803 < 900 e a função raiz quadrada é uma função crescente, então:

$$h \cong 803 < \sqrt{900} = 30$$

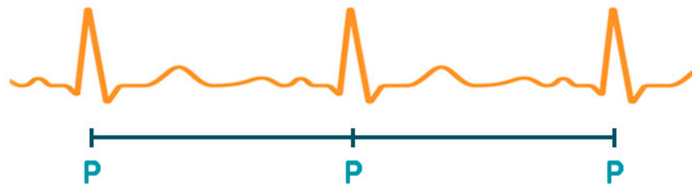
Portanto, a altura da torre é menor do que 30 metros.

Exemplo - Pressão arterial

Vamos entender um pouco sobre a pressão arterial e o que ela representa? A pressão arterial é a força que o sangue exerce contra a parede das artérias de acordo com os batimentos cardíacos. Essa pressão é apresentada por dois valores, por exemplo, **12 por 8** (como é conhecida popularmente), sendo esses valores chamados de pressão sistólica e pressão diastólica, respectivamente. Ou seja:

> A pressão sistólica, ou máxima, é aquela que marca a contração do músculo cardíaco quando ele bombeia sangue para o corpo. A diastólica, (ou mínima) por sua vez, é a do momento de repouso, em que os vasos permanecem abertos para o sangue passar.
>
> (SAÚDE, 2016)

A pressão arterial é medida durante o intervalo de tempo de um batimento cardíaco, que determina um ciclo completo. Ou seja, os valores máximo e mínimo da pressão sanguínea são medidos dentro do intervalo de tempo de um batimento, conforme podemos ver na próxima imagem, onde o intervalo de cada ciclo tem tempo P:



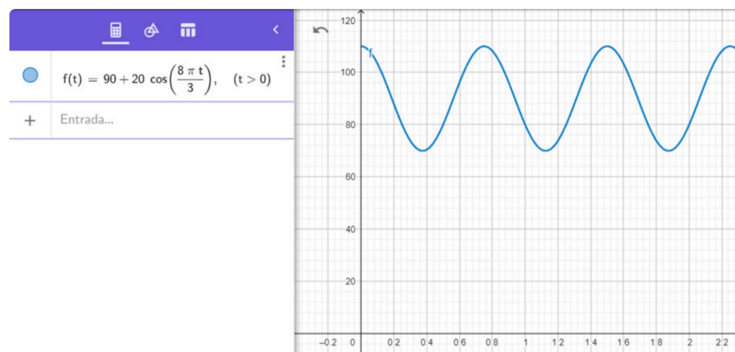
Esses tipos de ciclo podem ser modelados por uma função trigonométrica que nos apresentará muitas informações a respeito. A pressão é medida em mmHG (que simboliza a unidade de milímetros de mercúrio) e, nos monitores médicos, a pressão de um paciente que tem pressão de **11 por 7** na linguagem popular, por exemplo, aparece para o médico como máxima 110 mmHG e mínima 70 mmHG.

Agora que entendemos um pouco sobre a pressão arterial e o que ela representa, vamos analisar o exemplo.

Em uma consulta médica, verificou-se que a variação da pressão sanguínea de uma pessoa podia ser modelada pela expressão:

$$f(t) = 90 + 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$$

Em que **f(t)** representa o valor da pressão em mmHG e **t** representa o tempo em segundos. Observe:



Expressão adaptada de Trigonometria aplicada na vida real

Agora, responda as perguntas a seguir:

1. Qual é o intervalo de tempo de um batimento cardíaco?
2. Qual é a quantidade de batimentos cardíacos por minuto dessa pessoa?
3. Qual é a pressão arterial dessa pessoa comentada pelo médico de acordo com a linguagem popular?

Vamos ao resultado!

(a) O intervalo de tempo de um batimento cardiaco equivale a um ciclo completo, ou seja, como $f(t) = 90 + 20.\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$, então esse intervalo do ciclo corresponde ao período dessa função. Lembrando que o período $a = \frac{8\pi}{3}$ e o período será:

$$P = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = 2\pi \times \frac{3}{8\pi} = \frac{6\pi}{8\pi} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ segundos}$$

Portanto, o intervalo de tempo de um batimento cardíaco é de 0,75 segundo.

(b) Pelo item (a), sabemos que o intervalo de tempo de um batimento cardíaco é de 0,75 segundo. Como 1 minuto possui 60 segundos, para encontrar a quantidade **x** de batimentos cardíacos por minuto, basta resolvermos a seguinte regra de três, simples e direta:

$$\frac{1}{x} = \frac{0,75}{60} \Rightarrow 0,75 = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{0,75} = 80$$

Agora, sabemos que os batimentos cardíacos dessa pessoa correspondem a 80 batimentos por minuto.

$$f(t) = 90 + 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi i}{3}\right), \text{ temos que:}$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) \leq 1(\text{ multiplicando } 20) \Rightarrow$$
$$-20 \leq 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) \leq 20(\text{ somando } 90) \Rightarrow$$
$$70 \leq 90 + 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) \leq 110 \Rightarrow$$
$$\operatorname{im}(f) = [70, 110]$$

Logo, a pressão máxima dessa pessoa, vista pelo médico no seu monitor, é de 110 mmHG e a pressão mínima é de 70 mmHG. Na linguagem popular, o médico disse ao paciente que sua pressão era de 11 por 7.

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Muitas empresas utilizam funções periódicas para expressar sua produção. Dentre as funções abaixo, aquela que representa a produção total de certo produto, em toneladas, de periodicidade anual, em função do tempo t, expresso em meses, é:

A $f(t) = 800 + 900 \cdot \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$

B $f(t) = 1000 + 900 \cdot \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$

C $f(t) = 800 + 900 \cdot \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$

D $f(t) = 1000 + 900 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$

E $f(t) = 900.\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Como a periodicidade da produção é anual e o tempo t está expresso em meses, então o período P da função deve ser $P = 12$. Lembrando que o período da função

$$f(t) = d + c \cdot sen(at + b)$$

é dado por:

$$P = \frac{2\pi}{|a|}$$

Para P = 12 devemos ter:

$$12 = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow 12|a| = 2\pi \quad \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{6}$$

Desse modo, as funções possíveis para representar essa produção são as funções das letras (c), (d) e (e). Agora, como a função deve representar uma produção, ela não pode assumir valores inferiores a zero, ou seja, a imagem da função não pode ter valores negativos.

Lembrando que a função $g(t) = \text{sen}(at + b)$ tem imagem $\text{Im}(g) = [-1, 1]:$

(c) $f(t) = 800 + 900 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$ não representa a produção, pois:

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \text{ (multiplicando por 900)}$$

$$-900 \leq 900 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 900 \quad (\text{somando}\, 800)$$

$$-100 \leq 800 + 900 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1700$$

$$\text{Im}(f) = [-100, 1700]$$

$f(t)$ assume valores negativos

$f(t)$ não representa uma produção.

(e) $f(t) = 900 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$ não representa a produção, pois:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \quad (\text{ multiplicando por } 900) \Rightarrow$$

$$-900 \leq 900 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im}(f) = [-900, 900] \Rightarrow f(t) \text{ assume valores negativos}$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ não representa uma produção.}$$



(d) $f(t) = 1000 + 900 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$ representa a produção, pois:

$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ (multiplicando por 900)

$-900 \leq 900 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 900$ (somando 1000)

$$100 \leq 1000 + 900 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1900$$

$$\operatorname{Im}(f) = [100, 1900]$$

$f(t)$ não assume valores negativos

$f(t)$ representa essa produção.

Questão 2

A produção mensal de uma empresa é dada por:

$$f(t) = 1000 + 900. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Em que janeiro corresponde ao tempo $t = 1$, fevereiro corresponde a $t = 2$, e assim sucessivamente, assinale os meses nos quais ocorre, respectivamente, a menor e a maior produção:

A Fevereiro e agosto.

B Julho e fevereiro.

C

Agosto e fevereiro.

D Fevereiro e julho.

E Agosto e julho.

Parabéns! A alternativa C está correta.

Como a função é da forma:

$$f(t) = 1000 + 900.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Podemos perceber que ela assume seus valores mínimos e máximos exatamente quando o seno é mínimo ou máximo (respectivamente). Precisamos determinar:

- O mês de produção mínima;
- Os meses de produção máxima;
- O mês de produção máxima.

Lembrando que:

- $\operatorname{sen}(\theta)$ é mínimo e igual a -1, quando $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, onde $k \in Z$. Ou seja, seno é mínimo quando

$$\theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$$

Então, os meses cuja produção é mínima são os meses t, tais que:

$$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad (\times 6$$

$$\Rightarrow \pi t = 9\pi + 12k\pi - \pi \quad \Rightarrow \quad t = 8 + 12k, \quad \text{onde } k \in Z$$



Como t representa os meses do ano, k deve ser inteiro não negativo e como t varia de 1 a 12, k só pode ser:

$$k = 0 \Rightarrow t = 8 + 12.0 = 8$$

Logo, o mês de produção mínima foi agosto.

- $\text{sen}(\theta)$ é máximo e igual a 1 , quando $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, onde $k \in Z$. Ou seja, seno é mínimo quando $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$. Assim, os meses cuja produção é máxima são os meses t, tais que:

$$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad (\times 6$$

$$\Rightarrow \quad \pi t = 3\pi + 12k\pi - \pi \quad \Rightarrow \quad t = 2 + 12k, \quad \text{onde } k \in Z$$



Como t representa os meses do ano, k deve ser inteiro não negativo e como t varia de 1 a 12, k só pode ser:

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 + 12.0 = 2$$

Portanto, o mês de produção máxima foi fevereiro.

Considerações finais

Como vimos, podemos descrever várias situações do mundo real por meio de equações. Toda vez que o fazemos estamos criando um modelo. Ou seja, criar um modelo para interpretar uma situação (ou um fenômeno), ou modelar uma situação, nada mais é do que traduzir os comportamentos observados em equações matemáticas.

Modelar situações tem infinitas aplicações. Os modelos não ajudam a prever o que acontecerá com o fenômeno estudado em determinado ponto. Você se lembra da corrida de táxi? Com o modelo, podemos saber de antemão exatamente quanto custará a corrida para qualquer endereço fixo.

A melhor forma de criar um modelo é entender sempre, de forma geral, o comportamento do fenômeno e, depois, testar com resultados conhecidos equações matemáticas que se apresentam como solução. Assim, encontramos uma equação matemática que traduza o comportamento do fenômeno.



Podcast

Para encerrar, ouça um resumo sobre os principais tópicos abordados.

Para ouvir o *áudio*, acesse a versão online deste conteúdo.



Explore +

Confira o que separamos especialmente para você!

Funções, de O projeto Livro Aberto de Matemática.

Cálculos envolvendo meia-vida, de Mundo Educação.

Função exponencial - Aplicações em biologia, química e matemática, de Uol Educação.

Fissão Nuclear: por que se usa o urânio?, de CREF.

Enriquecimento do urânio, de InfoEscola.

Meia-vida ou período de semidesintegração, de Brasil Escola.

São Paulo Faz Escola: Caderno do Aluno volume 1 e 2, de NPE Catanduva.

Pressão arterial: qual número é mais perigoso?, de Revista Saúde.

Referências

BETZ, M. E. M. **Fissão nuclear:** por que se usa o urânio? CREF, 2015.

BONJORNO, J. R; BONJORNO, R. A; BONJORNO, V.; RAMOS, C. M. **Física Fundamental**. Volume único, São Paulo: FTD, 1999.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

FOMIN, D. A. **Círculos Matemáticos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

FONSECA, B. T. **Enriquecimento de urânio**. InfoEscola. Consultado na internet em: 7 abr. 2020.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. **Matemática Fundamental** - Uma Nova Abordagem. Volume único, São Paulo: FTD, 2002.

HAZZAN, S.; POMPEO, J. N. **Matemática Financeira**. 4.ed., São Paulo: Atual, 1998.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 2013.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed., Harbra, 1982.

MARCONDES, R. **Tritio**. InfoEscola. Consultado na internet em: 7 abr. 2020.

MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. **Física contexto & aplicações**. São Paulo: Scipione, 2016.

SAMANEZ, C. P. **Matemática Financeira**. 5. ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

VEJA. **Pressão arterial**: qual número é mais perigoso? Saúde é Vital. Veja, 6 de març. 2016.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?





Relatar problema